La rationalité du nombre chez Ludwig Friedrich Gottlob Frege

Ghislain Thierry MAGUESSA EBOME
ghisebome@gmail.com
Université Marien Ngouabi, Congo.

Résumé

L'analyse de la rationalité du nombre chez Frege vise à éclairer davantage le lien étroit que ce dernier parvient à construire entre l'arithmétique, la logique et la philosophie. La justification de ce lien est rendue manifeste à partir du moment où Frege considère le nombre non pas comme une réalité empirique ou psychologique, mais plutôt comme une réalité logique saisissable exclusivement par la raison. Cette considération fait du nombre une pensée essentiellement abstraite, transversale et universelle. Son opérationnalité traverse les frontières des langages symboliques et s'applique à tous les domaines du connaissable. Et, cette rationalité annonce un changement de paradigme épistémo-logique. On passe de la conception onto-logique de la vérité à une conception essentiellement formelle de la vérité ou validité. Cela étant, il est désormais absurde de penser une distinction radicale entre l'arithmétique, la logique et la philosophie. Ces trois domaines forment un tout cohérent appelé métaphysique.

Mots clés

arithmétique, logique, nombre, rationalité, validité.

Abstract

L'analyse de la rationalité du nombre chez Frege vise à éclairer davantage le lien étroit que ce dernier parvient à construire entre l'arithmétique, la logique et la philosophie. La justification de ce lien est rendue manifeste à partir du moment où Frege considère le nombre non pas comme une réalité empirique ou psychologique, mais plutôt comme une réalité logique saisissable exclusivement par la raison. Cette considération fait du nombre une pensée essentiellement abstraite, transversale et universelle. Son opérationnalité traverse les frontières des langages symboliques et s'applique à tous les domaines du connaissable. Et, cette rationalité annonce un changement de paradigme épistémo-logique. On passe de la conception onto-logique de la vérité à une conception essentiellement formelle de la vérité ou validité. Cela étant, il est désormais absurde de penser une distinction

radicale entre l'arithmétique, la logique et la philosophie. Ces trois domaines forment un tout cohérent appelé métaphysique.

Keywords
arithmétique, logique, nombre, rationalité, validité.

Introduction

Dans le souci de remédier tant soit peu à la crise des fondements mathématiques, Frege s'est fait le devoir d'analyser méticuleusement la notion de nombre. Cette analyse qui permet de situer la pensée frégéenne au carrefour des sciences logico-mathématiques est intuitivement annoncée par Frege (1999, pp.5-6.) dans son premier ouvrage en ces termes :

> Je devais d'abord chercher jusqu'où l'on pourrait aller dans l'arithmétique grâce aux déductions seules, appuyé uniquement sur les lois de la pensée, qui sont au-dessus de toutes les particularités. A partir de là, ma démarche était de chercher d'abord à réduire le concept de succession dans une suite à la conséquence logique, puis à progresser vers le concept de nombre.

L'arithmétique en tant que science des nombres est le point d'ancrage de la pensée frégéenne. Il se trouve que ce champ de la pensée mathématique traverse une période de crise des fondements et pour y remédier, Frege se propose de refonder les mathématiques à partir des lois purement logiques, celles qui existent indépendamment de toutes les représentations psychologiques. Il s'agit d'un projet de logicisation des mathématiques et plus particulièrement de l'arithmétique qui est le champ de prédilection de la pensée mathématique de Frege. Ainsi, la redéfinition de la notion de nombre s'inscrit utilement dans l'esprit de la réalisation de ce projet de refondation des mathématiques sur des bases purement logiques. C'est ce qui marque une différence procédurale entre l'entreprise de Frege et celle de Boole. Cette différence est soulignée par Ramatoulaye Diagne (2004, p.7) en ces termes :

> Dans ce travail de construction, il ne s'agit plus pour les mathématiques de prêter à la philosophie (more geometrico) ou à la logique leur méthode, leurs signes ou leurs symboles, ce sont les mathématiques qui reconnaissent qu'elles ont besoin de la logique et de la philosophie pour se doter de fondements solides. (…) avec

> Frege, l'histoire de la logique connaît un tournant décisif. Elle passe d'un projet de mathématisation de la logique vers un projet de logicisation des mathématiques. Frege rompt ainsi avec une démarche comme celle de George Boole qui s'inscrit plutôt dans une dynamique de mathématisation de la logique.

De ce fait, l'analyse de la rationalité du nombre vient renforcer à nouveaux frais, la relation de complémentarité qui existe entre les mathématiques (arithmétique), la logique et la philosophie. Désormais, on ne parlera plus d'une différence de fondement entre ces trois domaines de la pensée. Car, ils sont régis par les mêmes lois et visent le même objectif, celui de garantir la pureté et l'universalité de la pensée. Cette interdisciplinarité entre les mathématiques, la logique et la philosophie est rendue manifeste par ce propos de Frege (1969, p. 118.) :

> J'avoue que mon exposé a pris un tour plus philosophique qu'il ne semblera concevable à beaucoup de mathématiciens ; mais une recherche fondamentale sur le concept de nombre ne peut manquer d'être marquée de philosophie. La tâche est commune aux mathématiques et à la philosophie.

La réflexion sur la rationalité du nombre se situe alors aisément à la croisée des chemins mathématiques, logiques et philosophiques en raison de la primauté que ces trois domaines assignent à la pensée abstraite. Ainsi, il s'agit dans cette dissertation philosophique de dégager la nature du nombre, sa valeur heuristique afin solidifier davantage cette complémentarité sus signalée. Pour y parvenir, nous nous posons les questions suivantes qui feront l'objet de notre problématique : le nombre est-il une réalité physique ou logique ? La pensée numérique est-elle universelle ? La conception frégéenne du nombre constitue-t-elle un fondement de la vérité-cohérence ?

Le traitement de ces questions passe utilement par la vérification des trois hypothèses ci-après : le nombre serait une réalité logique ; la pensée numérique aurait une portée transversale et universelle et la conception frégéenne du nombre constituerait un fondement de la vérité-cohérence. La finalité de cette analyse est de montrer qu'il n'est pas possible de penser une rupture radicale entre la mathématique, la logique et la philosophie. Ce sont trois champs étroitement unis et se complètent mutuellement dans la dynamique de la purification de la pensée. A travers une méthode à la fois histoire et critique, nous déroulerons notre étude autour de trois points. Dans le premier point il

est question de la nature du nombre. Le deuxième point traite de la rationalité du nombre. Le dernier point est consacré à la pensée numérique comme fondement de la vérité cohérence.

1. De la nature du nombre

C'est en examinant de façon critique les opinions de quelques auteurs sur le concept de nombre cardinal que Frege dégage la nature de cette notion. Les opinions examinées sont celles de Leibniz, Mill, Newton, Hankel, Cantor, Schröder et Baumann qui, pour l'essentiel, ramènent le concept de nombre cardinal à une réalité empirique ou à un ensemble des choses extérieures. Constatant que ces différentes opinions font du nombre une réalité subjective et psychologique, Frege prend la précaution de préciser ce qui suit :

> On voit à quelles merveilles on aboutit lorsqu'on file un peu l'idée que le nombre est une représentation. On en conclura que le nombre n'est ni spatial et physique comme les cailloux et nonnettes de Mill, ni subjectif comme les représentations, mais qu'il est insaisissable par les sens et objectif. Le fondement de cette objectivité ne peut être dans l'impression du sens, laquelle en tant qu'affection de l'âme est entièrement subjective, mais – pour autant que j'y vois clair – dans la seule raison. (G. Frege, 1969, p.156.)

Cela montre que la pensée du nombre n'est pas une invention subjective et ne dépend pas des représentations psychologiques qui varient d'un individu à un autre. Le nombre est une entité abstraite qui existe indépendamment de l'homme et de la réalité physique. C'est ce qui justifie son objectivité et son universalité. De même, l'arithmétique en tant que science des nombres cardinaux ou naturels est essentiellement antipsychologique et objective. En considérant le nombre comme une entité saisissable exclusivement par la raison, Frege annonce le besoin de détacher l'arithmétique de la psychologie afin qu'elle soit clairement distincte de la géométrie qui est d'essence psychologique. Frege récuse cet élan de psychologisation de l'arithmétique propre aux différentes opinions de ses prédécesseurs lorsqu'il déclare :

> Si le nombre était une représentation, l'arithmétique serait de la psychologie. Or, elle ne l'est pas plus que l'astronomie. (…) Il serait étonnant que la plus exacte des sciences dût prendre appui

> sur la psychologie, qui tâtonne encore dans l'incertitude ». (G. Frege, 1969, p.156.).

L'arithmétique apparaît comme le lieu de déploiement de la pensée pure et exacte. Cette pureté se rattache au caractère abstrait et objectif du nombre. Ici, le nombre est considéré comme étant une pensée qui existe indépendamment des expressions numériques représentées graphiquement par un système formel ou un langage donné. On doit distinguer la pensée du nombre de sa représentation graphique saisissable par les sens. Frege estime que « *le nombre n'est pas plus un objet de la psychologie ou un produit de nos processus psychiques (…) Le nombre est tout aussi objectif* ». (G. Frege, 1969, p.153). A partir de cette précision relative à la nature du nombre, Frege consolide davantage le lien étroit qui existe entre les mathématiques, la logique et la philosophie qui forment désormais un seul tout appelé métaphysique qui est entendue comme le plus haut degré de la pensée pure et antipsychologique. Il s'agit d'un dépassement de la sphère empirique de la pensée vraie. La pensée du nombre se situe au-delà de toute subjectivité. C'est ce qui ressort de ce propos de Xavier Verley (2004, p.62.) :

> Le caractère métaphysique du nombre signifie qu'il dépasse l'opposition matériel-immatériel puisqu'il s'applique aussi bien à l'un qu'à l'autre. Les nombres révèlent qu'on peut penser vrai sans qu'on ait besoin de supposer une subjectivité ou une position dans l'espace-temps.

La pensée numérique cesse d'être subjective ou psychologique. Elle est essentiellement objective et logique. Elle est saisie par la raison sans l'apport des sens. Mais, l'application de la pensée numérique dépasse les frontières de l'immatériel. Le caractère objectif du nombre ne suppose pas une rupture radicale entre l'empirique et l'abstrait. A propos de l'objectivité, Frege (1969, p.155) écrit :

> Par objectivité, j'entends indépendance par rapport à nos sensations, intuitions et représentations, par rapport aux ébauches d'images intérieures qui nous viennent des souvenirs d'impressions passées, mais non indépendance par rapport à la raison.

Frege distingue deux sortes d'intuitions : l'intuition psychologique liée aux organes de sens, et l'intuition rationnelle, celle qui saisit les

lois logiques et les entités arithmétiques sans l'entremise du monde extérieur. De ce fait, ce qui est objectif se rattache essentiellement à la seconde forme d'intuition qui opère indépendamment des données empiriques. Cela montre que le nombre n'est pas une production psychologique ou empirique comme le précise Roy (1960, p. 151.) :

> Le nombre est proprement une forme opératoire que l'esprit applique aux pluralités concrètes. Et toute numération de ce genre suppose acquise déjà l'idée de nombre : de sorte que l'attitude empiriste en ce qui concerne cette idée implique un cercle vicieux.

L'application du nombre aux objets ne s'identifie pas à un moment de psychologisation ou de matérialisation du nombre. Cette application est un élan de rationalisation ou de mathématisation de la réalité physique. Car, c'est le nombre qui modifie quantitativement l'objet et non l'inverse. Cette précision paraît plus subtile lorsque Frege distingue la représentation subjective de la représentation objective :

> La représentation, au sens subjectif, c'est ce à quoi s'appliquent les lois psychologiques de l'association ; elle est de nature sensible, analogue à un tableau. La représentation, au sens objectif, appartient à la logique, et elle est essentiellement non sensible. (1969, p.155)

Il y a lieu de penser à un réalisme métaphysique chez Frege quand il prône l'existence des lois de la logique au-delà de l'expérience sensible. Ce type de réalisme s'identifie à celui développé par Platon lorsqu'il parle des réalités du monde intelligible. On parlerait d'un platonisme persistant chez Frege. Car le statut qu'il assigne au nombre est en rupture radicale avec l'expérience sensible et fait sublimement signe aux réalités abstraites telles que conçues par Platon. Cette persistance du platonisme est soulignée par Auguste Nsonsissa (2014, pp. 22-23) :

> La pensée tournée vers l'Intelligence suprême devient une exception, lorsqu'elle se révèle comme pensée de soi. Ce que Platon appelle Idée. Or Frege s'attache à une démarche spécifique qui s'inscrit dans la même veine que celle de Platon en vue de dégager la signification des pensées.

On peut dire que Frege situe la pensée du nombre au-delà des exigences empiriques et psychologiques de telle sorte qu'elle devienne une propriété exclusivement logique. Désormais, les lois qui sous-tendent le fonctionnement du raisonnement arithmétique sont d'essence logique, intelligible au même titre que les *Idées* parfaites et immuables prônées par Platon. Pareille considération énonce explicitement l'exigence de l'universalité de la pensée numérique chez Frege (1969, p. 117.) :

> La pensée est partout la même, essentiellement : on n'observe pas que des lois de la pensée soient de différents types selon l'objet auquel elle s'applique. Les différences ne tiennent qu'au degré de pureté de la pensée, à son indépendance à l'égard des influences psychologiques, à l'aide extérieure qu'apportent le langage (…) et il se pourrait que sur ce point, la mathématique ne se laisse dépasser par aucune science, fût-ce la philosophie.

La mathématique chez Frege s'identifie particulièrement à l'arithmétique en tant que science des nombres. Les nombres sont des réalités logiques qui existent indépendamment des représentations psychologiques et du monde extérieur. Cette catégorisation des nombres fait que la mathématique soit entièrement distincte des sciences de la nature. Il convient cependant de souligner que la théorisation du nombre demeure est universelle. La différence entre les champs d'exploitation du nombre n'influence pas la pensée exprimée par le nombre. Cela montre que la pensée numérique est au-delà des graphiques numériques qui varient d'un système linguistique à un autre. Autrement dit, le nombre est différent de l'écriture du nombre dans un système symbolique donné. La forme écrite du nombre encore appelée chiffre varie d'un langage à un autre, tandis que la pensée du nombre demeure la même d'autant plus qu'elle est abstraite ou logique. C'est ce qui ressort de ce propos de Frege : « *Les nombres sont des objets qui n'appartiennent à personne en propre, et ils sont identiques pour tous : ce ne sont pas des états intimes plus ou moins semblables d'individus différents* ». (G. Frege, 1969, p. 216)

Les nombres ne sont ni des réalités empiriques ni des réalités psychologiques. Ils sont des réalités abstraites ou logiques qui existent indépendamment de la sensibilité et des représentations psychologiques. C'est par substitution ou par extension que le nombre se rattache à une quelconque réalité. Mais, cette substitution ou

extension ne modifie guère la pensée du nombre. C'est de là que surgit la question de la rationalité du nombre.

2. De la rationalité du nombre

Par rationalité du nombre, nous entendons le degré d'opérationnalité de la pensée numérique fondé sur les lois de la pensée pure. Cette rationalité apparaît plus clairement lorsque Frege prend la précaution de fonder l'arithmétique sur les lois purement logiques. Il s'agit d'un élan de logicisation de l'arithmétique, tel qu'il le souligne :

> L'arithmétique serait donc simplement une logique développée, et chaque proposition arithmétique une loi logique, bien que dérivée. L'application de l'arithmétique à la connaissance de la nature serait alors l'élaboration logique des faits d'observation ; et calculer serait déduire. Les lois des nombres n'auraient pas besoin (…) d'être confirmées par la pratique pour qu'on les dise applicables au monde extérieur. (G. Frege, 1969, p.211)

Les nombres opèrent indépendamment des objets concrets. Les différentes opérations arithmétiques sont fondées sur les lois logiques.

Or, dans la manipulation des nombres, Frege privilégie la méthode déductive au détriment de la méthode inductive. Cette prédilection se justifie par le fait qu'à partir de la déduction, les résultats issus du calcul numériques s'avèrent universellement vrais. La méthode déductive garantit donc selon Frege l'universalité de la pensée.

> La déduction a, en arithmétique, un cours remarquablement uniforme, et repose presque toujours sur ce principe que les mêmes transformations opérées sur les mêmes nombres donnent les mêmes résultats. Ce n'est pas là, bien sûr, le seul type de raisonnement usité en arithmétique. (G. Frege, 1971, p. 68)

Cela suppose que le résultat d'un calcul arithmétique va au-delà des frontières de la subjectivité. Il est objectif et universel d'autant plus que la méthode mise en exergue se situe au-dessus des états psychologiques qui varient d'un individu à un autre. Le calcul numérique devient le lieu de construction des raisonnements universels et nécessaires, grâce au degré d'abstraction qui caractérise la pensée numérique. Frege considère la déduction comme étant plus

pure que l'induction qui ne garantit pas la force concluante du raisonnement. Frege souligne d'ailleurs que « *l'induction, parce qu'elle ne peut que rendre probable une proposition, doit s'appuyer sur la théorie des probabilités. Mais on ne voit pas comment développer cette théorie sans présupposer des lois arithmétiques* », (G. Frege, 1971, p. 138.)

Frege récuse l'induction à cause du fait qu'elle ne garantit pas l'universalité du raisonnement et elle s'avère psychologique. L'induction privilégie la particularité et la probabilité qui, pour Frege, sont des moments de fragilisation de la rigueur et la pureté du raisonnement logico-mathématique. L'induction est psychologique et subjective. C'est au prix de cette subjectivité qu'elle ne peut pas garantir la force concluante du raisonnement scientifique. C'est la déduction qui paraît plus efficace et mieux adaptée au raisonnement logico-mathématique fonctionnant à partir des nombres comme l'indique Frege :

> Il y a tout lieu de penser que le procédé de l'induction reçoit lui-même sa légitimité des théorèmes généraux de l'arithmétique à moins qu'on n'entende par induction un simple effet de l'habitude. Mais celle-ci est sans force aucune pour garantir la vérité ». (G. Frege, 1971, p.138)

Pareille considération s'inscrit à point nommé dans le rationalisme de Frege qui consiste d'une part à considérer l'arithmétique comme un développement de la logique de telle sorte que toute proposition arithmétique doit être prise comme étant une loi logique universelle et indépendante de toute représentation mentale. Et d'autre part, la langue par formule de Frege est un outil de calcul logico-mathématique applicable à toutes les sciences d'autant plus qu'elle fixe les normes de validation de toute vérité scientifique fondée sur la méthode déductive pure, celle qui consiste à passer du plus général au moins général sans faire usage de ce qui relève de l'expérience sensible.

La méthode déductive qui paraît la plus appropriée pour la logique mathématique pure se distingue radicalement de l'induction, une forme d'argumentation qui s'appuie sur la connaissance particulière pour se lever vers une connaissance générale. C'est la méthode utilisée par les sciences expérimentales parmi lesquelles on a la psychologie considérée par Frege comme étant une science secondaire, non conciliable avec l'arithmétique qui est une science

pure et universelle. Ainsi, le nombre en tant qu'entité d'ordre logique devient un outil efficace pour garantir la rigueur et l'universalité du raisonnement scientifique. Fort de cette efficacité, il y a lieu de penser que le calcul numérique constitue le point d'ancrage de toute démonstration scientifique. Cette rationalité du nombre a conduit Xavier Verley à considérer l'arithmétique comment le fondement de l'opérationnalité mathématique :

> C'est d'abord sur la science des nombres qu'a pu s'effectuer le calcul : les calculs algébriques n'auraient pas été possibles s'il n'y avait eu préalablement des calculs avec des nombres et les opérateurs habituels, addition, soustraction, la division ». (X. Verley, 2014, p.168)

La rationalité du nombre arithmétique qui est au cœur de la construction de l'entreprise logique de Frege consiste à montrer que le nombre constitue le fondement même de toutes les innovations logico-mathématiques qui sont exploitées actuellement. Dès lors, le nombre en tant que pensée pure est à l'origine de toute opération de l'esprit conduisant à une déduction objective, universelle et nécessaire. Cette universalité ne vient pas seulement des lois de la logique, mais aussi et surtout de la nature du nombre cardinal en tant qu'objet d'étude de l'arithmétique. D'où cette précision de Xavier Verley :

> Nous aurions donc chez Frege une logique référant à un domaine universel. (…). Nous voudrions montrer que si on peut parler d'universalité chez Frege, ce n'est pas tellement de celle de la logique mais plutôt de celle d'une science paradigmatique, à savoir l'arithmétique ». (X. Verley, 2004, pp.39-40)

En tant qu'objet d'étude de l'arithmétique, le nombre devient un opérateur transdisciplinaire d'autant plus que sa fonction traverse les frontières de l'arithmétique pour s'appliquer aux domaines autres que mathématiques. Cela montre qu'il est possible d'accéder à l'intelligibilité du nombre sans passer par le calcul arithmétique ou algébrique. Le nombre peut être utile au-delà des ensembles classiques d'obédience arithmétique. Mais, ce caractère transdisciplinaire n'entame en aucun cas la dimension pluridisciplinaire du nombre telle qu'elle se donne à lire dans le projet logiciste de Frege qui vise à faire

de l'arithmétique une science universelle, une fois qu'elle soit devenue une logique mathématique applicable à n'importe quel champ scientifique. Aucun domaine scientifique ne peut se permettre de tourner le dos au nombre. Cet aspect pluridisciplinaire du nombre peut être éclairé à partir des domaines scientifiques suivants: la géographie, la biologie, l'histoire, la physique, la chimie. Et en voici quelques exemples :

1. Le globe terrestre est constitué de deux(2) pôles. (géographie) ;
2. Un homme adulte a trente-deux(32) dents. (biologie) ;
3. Il existe trois(3) états de la matière. (physique) ;
4. La molécule d'eau (H_2O) est constituée de deux(2) atomes d'hydrogène et un atome d'oxygène(1). (chimie) ;
5. La ville de Brazzaville fut créée le trois(3) octobre mil huit cent quatre-vingt (1880). (histoire).

Cette illustration permet de constater que tous les domaines de recherche scientifique exploitent le nombre soit pour démontrer la validité des résultats de leurs recherches, soit pour fixer l'humanité dans le temps et dans l'espace. L'opérationnalité du nombre traverse sans doute les frontières de l'arithmétique pour s'appliquer partout où une investigation scientifique est possible. Le nombre devient l'unité de validation de la scientificité de toute recherche qui se veut rigoureuse et universelle.

Hormis cette dimension opératoire, la rationalité du nombre se justifie par son mode d'appréhension. Selon Frege, le nombre est un concept et non un objet du monde empirique que l'on peut saisir par les organes de sens. L'attribution d'un nombre à une quelconque réalité est une opération qui consiste à énoncer une détermination objective d'un concept qui ne peut être saisi que par la raison. Frege précise cette dimension de la rationalité du nombre lorsqu'il écrit :

> L'arithmétique traite d'objets dont nous ne prenons pas connaissance comme d'un élément étranger, apporté de l'extérieur par médiation des sens, ces objets sont donnés immédiatement par la raison, et elle peut les pénétrer totalement, comme ce qui lui est le plus propre. (…) ces objets ne sont pas subjectifs, tissés par notre cerveau. Rien n'est plus objectif que les lois de l'arithmétique. (…) Attribuer un nombre, c'est énoncer une détermination objective d'un concept. (G. Frege, 1969, pp. 226-226.)

Les éléments qui sont donnés immédiatement par la raison sont des nombres. C'est en vertu de leur saisie immédiate que les nombres ont une portée transversale et universelle. La pensée numérique traverse le cadre des systèmes symboliques formels pour s'appliquer à tous les domaines du connaissable. La pensée du nombre est applicable à tout objet réel ou non réel. Cette universalité du nombre est reconnue par Xavier Verley lorsqu'il affirme : « *Les nombres sont les seuls universaux qui ne soient pas relatifs à la subjectivité : ils s'appliquent à tout* ». (X. Verley, 2004, pp.161-162)

Cette précision permet de comprendre que la pensée du nombre qui se distingue des différentes représentations graphiques des chiffres est transversale et universelle. La pensée du nombre est d'essence logique et admet une opérationnalité à la fois systématique et extra-systématique, formelle et informelle. On constate que Frege a donné un nouveau souffle de vie à l'arithmétique lorsqu'il détache la pensée du nombre de l'emprise de la psychologie des sciences de la nature. C'est ce détachement qui justifie la différence procédurale qui existe entre l'entreprise frégéenne et l'entreprise husserlienne, comme le souligne Mamadou Djibo :

> Pour Frege, il est sans appel que la psychologie, (…), n'a et ne doit s'imaginer contribuer de quelque manière que ce soit à la fondation de l'arithmétique. En marquant ainsi son divorce d'avec l'édifice psychologique husserlien, Frege va affirmer et soutenir le lien indissoluble entre l'arithmétique et la logique. (M. Djibo, 2012, p.55)

L'opposition entre Frege et Husserl s'explique par le fait qu'au lieu de refonder l'arithmétique sur la base des lois de la logique comme l'entend le premier, Husserl a détourné l'arithmétique vers un terrain qui semble sacrifier l'objectivité et l'universalité si précieuse à cette science. En d'autres termes, au lieu de logiciser l'arithmétique pour la mettre à l'abri du faillibilisme épistémologique inhérent au sujet épistémique, Husserl lui a attribué un fondement psychologique et l'a réduite au rang de science expérimentale, faillible et subjective. Dira-t-on mieux que Frege a réussi en son temps et à sa manière, à redonner à la mathématique en général et à l'arithmétique en particulier son véritable fondement en la purifiant par les lois de la logique et en la dissociant de la psychologie. Cette refondation de l'arithmétique a un impact non négligeable sur la conception de la vérité logico-mathématique.

3. La pensée numérique comme fondement de la vérité-cohérence

Il s'agit ici, de montrer que la dépsychologisation de la pensée du nombre par Frege annonce une nouvelle ère de la conception de la vérité. Désormais, il n'est plus question d'examiner la véracité de la pensée à partir de l'exigence de la correspondance nécessaire entre la pensée et la réalité. On passe à une nouvelle conception de la vérité fondée sur la cohérence de la pensée avec les lois de la logique mises en exergue. Cette refondation inhérente à la pensée du nombre se justifie à partir de ce propos de Frege :

> La démonstration la plus solide est manifestement celle qui est purement logique, qui, abstraction faite de la caractéristique particulière des choses, se fonde seulement sur les lois sur lesquelles toute connaissance repose. (…). Donc, ce n'est pas le mode de formation psychologique, mais la méthode de démonstration la plus parfaite qui est au fondement de la distinction. (G. Frege, 1999, p.5)

L'abstraction renvoie à un élan de dépassement du niveau empirique des choses pour focaliser la connaissance à un niveau plus élevé, celui de la logique pure en tant que science des lois de l'être vrai fonctionnant à partir d'une manipulation des symboles afin d'arriver à un résultat indiscutable. Les lois d'une telle écriture symbolique ne sont pas saisissables par la conscience psychologique dans son rapport étroit avec les objets sensibles, mais plutôt par la raison objective qui fonctionne indépendamment des influences de l'espace et du temps.

Le mode de formation psychologique s'identifie alors à la manière dont la conscience humaine saisit les objets du monde extérieur par la médiation des organes de sens et cette saisie offre des vérités qui varient d'une conscience à une autre. Frege récuse cette méthode, car elle paraît trop subjective et imparfaite au profit de la méthode logique rendue possible par l'effort infaillible de la raison qui se détache de plus en plus de la sensibilité. On peut parler d'un changement de paradigme de la vérité qui annonce clairement la naissance d'une logique purement mathématique, tel qu'il le précise :

> Les vérités de l'arithmétique se rapporteraient à celles de la logique comme les théorèmes aux axiomes de la géométrie. Chacune de ces vérités résumerait en elle une chaîne de

> raisons prête pour l'usage futur ; grâce à elles il n'y aurait plus besoin d'avancer pas à pas dans les déductions, on pourrait énoncer immédiatement le résultat de toute la chaîne. (G. Frege, 1969, pp, 141-142.)

Dès lors, la question de la vérité trouve son compte dans un contexte purement logique où, seule la cohérence du raisonnement qui est fondée sur les lois de la logique pure paraît la plus essentielle et la plus performante. Frege pense qu'il faut aller au-delà des rapports de correspondance qui existent entre la proposition et son contenu empirique afin de garantir l'immuabilité de sa valeur de vérité en tant que forme logique. Il le souligne en ces termes :

> Au lieu d'attacher directement une chaîne de raisons à une proposition de fait, on peut, laissant de côté l'actualité de cette proposition, introduire son contenu sous forme de proposition conditionnelle. (…) Cette dernière vérité trouverait son fondement dans la seule pensée ou, (…) dans le maniement du langage. Il n'est pas impossible que les lois des nombres soient de ce type. (G. Frege, 1969, p, 144).

L'abstraction de la dimension matérielle de la proposition s'impose alors comme un exercice intellectuel nécessaire pour sauver la valeur de vérité logique de cette proposition de toute sorte d'équivocité psychologique. Pour gagner un tel pari, il faut inscrire le discours scientifique dans le contexte d'un langage purement symbolique construit à partir d'un édifice rigoureux des seules lois de la logique saisies indépendamment de nos états d'âme.

Le type de langage qui répond à une telle exigence doit être essentiellement artificiel et construit à partir des symboles purs tels que les nombres cardinaux. Tel est le cas de l'idéographie frégéenne en tant que langage formulaire de la pensée pure construit d'après celui de l'arithmétique. Usant d'un tel langage symbolique, la vérité cesse d'être comprise comme adéquation de la pensée avec la réalité qui existe en dehors du langage. On s'installe désormais dans un domaine plus abstrait, où, seule la cohérence de la pensée en tant que forme logique se suffit à elle-même. Ce domaine n'est ni celui des objets empiriques ni celui des représentations psychologiques construites à partir des relations étroites que la conscience entretient avec le monde sensible.

Frege met en crise ce type de rapport à la connaissance au moyen des représentations psychologiques ou encore par la correspondance

entre la pensée et la réalité. Il estime d'ailleurs que la saisie de la vérité au sens purement logique ne relève pas de la compétence de la conscience psychologique, mais elle est particulièrement une opération propre à la raison dans toute son autonomie eu égard à la conscience et au monde extérieur. Les nombres paraissent de ce fait comme les seuls outils susceptibles de favoriser une telle opération, car ils sont purs par nature. L'existence des nombres ne dépend d'aucune invention humaine. Par conséquent, le calcul arithmétique s'avère l'opération la plus parfaite pour construire la vérité qui ne renvoie à aucune chose qui soit différente d'elle-même. Telle est la nouvelle caractéristique de la vérité porteuse de toute objectivité. C'est dans le même ordre d'idées que Xavier Verley (2004, p.94) écrit: « *Le caractère objectif de la pensée lui vient de sa relation interne à la vérité qui lui permet de varier dans sa forme sans cesser de demeurer la même pensée* ».

Cela montre que la vérité devient de plus en plus objective lorsqu'elle est conçue de façon intralinguistique au moyen du calcul logico-mathématique fondé sur les nombres. C'est ainsi qu'on retrouvera dans le corpus frégéen des raisonnements tel que : ⊢5+7=12. Le symbole ⊢ placé avant la proposition montre que celle-ci est logiquement vraie sans que l'on ait besoin de la rattacher à un quelconque objet spatial. Une telle proposition est sauvée de toute tentative de remise en cause en vertu de sa validité qui s'avère abstraite et universelle. Seule sa forme logique paraît primordiale. Ainsi, Frege (1971, p. 173.) précise : « *La vérité n'est pas une propriété qui corresponde à un genre particulier d'impressions sensibles* ».

La notion de vérité dans la perspective frégéenne renvoie à ce qui est vrai universellement, c'est-à-dire ce qui est compris par tout le monde de la même manière et ne peut plus faire l'objet d'une nouvelle recherche. La vérité logique est construite d'avance et l'effort du logicien consiste simplement à se rassurer de la force concluante des inférences déductives mises à contribution. Autrement dit, au cours d'une démonstration logico-mathématique, le logicien n'ajoute rien et ne retranche rien de ce qui est déjà établi. Tout son travail consiste à reproduire les vérités établies en suivant rigoureusement l'ordre des lois logiques. Cela montre qu'une pensée vraie n'est pas celle qui résulte du rapport entre une représentation psychologique et un objet du monde extérieur. Elle est plutôt le produit d'une application cohérente des lois de la logique pure dans une chaîne de raisonnement.

De ce fait, l'épithète formelle qui se rattache à la notion de vérité peut être appréhendée dans un double sens. D'une part, elle se rattache à la prédilection qui est accordée à la forme (structure) du raisonnement, abstraction faite du contenu empirique des propositions. Et d'autre part, elle renvoie à la forme logique de la proposition, c'est-à-dire sa valeur de vérité (le vrai) qui demeure la même partout. Ce qui est commun à ces deux considérations c'est le caractère abstrait y afférent qui fait signe vers une métaphysique sublime. Fort de cet optimisme du formalisme logique, Frege parvient à montrer combien de fois un tableau en tant que représentation psychologique s'avère incapable de satisfaire aux exigences de la pensée pure, car il estime qu'

> il est évident qu'on n'appellerait pas un tableau vrai s'il n'y avait là une intention. Le tableau doit représenter quelque chose. La représentation n'est pas non plus dite vraie en elle-même, mais eu égard à une intention, à l'idée qu'elle doit s'accorder à quelque chose ». (G. Frege, 1971, p.172.)

Le fait que le tableau est toujours construit en référence à un objet sensible, il est alors porteur d'une certaine subjectivité, et surtout à cause du fait qu'il soit toujours perçu par l'entremise des organes de sens. Il devient alors un élément sacrificateur d'objectivité scientifique. Frege récuse l'usage du tableau parce qu'il le trouve plus rattaché à la psychologie qu'à l'arithmétique. Le tableau n'a pas la même nature que le vrai. Le tableau est empirique et subjectif, tandis que le vrai est abstrait et objectif. Il paraît invraisemblable de penser un rapport cohérent entre un tableau logique saisi par la conscience et le vrai en tant que valeur de vérité logique qui ne peut être appréhendée que par la raison au moyen d'une abstraction logique.

La vérité logique est le produit d'un accord parfait entre les entités appartenant au même règne tels que les nombres, les symboles d'opération et les lois logiques qui sont tous les constituants essentiels de l'univers logico-mathématique. Eu égard à cette familiarité, la vérité qui y découle est simplement le résultat d'un accord systématique excepté de toute critique. A ce sujet Frege affirme ce qui suit : « *Un accord est un rapport. Un accord ne peut être total que si les choses en accord coïncident, donc ne sont pas de nature différente* ». (G. Frege, 1971, p.172).

Il paraît évident que le nombre et la vérité ont la même nature qui est essentiellement logique. C'est de cette harmonie naturelle que

résulte la perfection de la logique mathématique. La vérité ne se définit pas en termes de coïncidence entre les choses de nature différente. Il est plus cohérent de tirer une conséquence nécessaire lorsqu'on substitue un nombre à chaque entité empirique considérée au départ. C'est le cas du raisonnement suivant : « 1+1+1+1=4 » qui est une vérité abstraite, indiscutable et parfaite que l'on peut appliquer à n'importe quelle circonstance de la vie cognitive. Telle est la spécificité de la rationalité du nombre sus-évoquée.

Cette rationalité du nombre s'explicite davantage lorsque la pensée exprimée au moyen d'une démonstration logico-mathématique demeure la même quel que soit le contexte linguistique dans lequel l'opération est déroulée. Il y a une nette différence entre le signe numérique et la pensée numérique. Le premier varie d'une langue à une autre, tandis que la pensée exprimée par un nombre demeure la même quel que soit le code de numération utilisé. Tenant fermement au triomphe de sa conception formaliste de la vérité, G. Frege (1994, p. 12) écrit :

> Si le contenu de la phrase 2 + 3 = 5 est exactement le même, au sens le plus strict, pour toutes les personnes qui le reconnaissent comme vrai, cela veut dire qu'il n'est pas un produit du psychisme de celui-ci, ou un produit du psychisme de celui-là, mais qu'il est saisi et reconnu comme vrai pareillement par chacun d'eux.

La validité d'une démonstration logico-mathématique ne relève pas de l'assentiment d'une conscience, mais plutôt de l'accord de toute la communauté scientifique après une confrontation rationnelle de l'opération déroulée avec les lois logiques qui régissent le déroulement de ladite opération. La pertinence d'un tel exercice tient du fait qu'aucune conscience singulière ne peut prétendre avoir le monopole de la vérité. Cette dernière est conçue indépendamment des intérêts particuliers de chacun. On constate qu'à partir de la conception frégéenne du nombre, la vérité change de paradigme. Elle n'est plus conçue en termes de correspondance nécessaire entre la pensée et la réalité. On passe d'une conception onto-logique de la vérité à une conception formelle de la vérité. Dans ce contexte, le terme validité paraît le mieux adapté comme le précise Ramatoulaye Diagne : « *Désormais la conception d'une vérité-correspondance cède la place à une définition de la vérité comme cohérence interne, c'est-à-dire validité* ». (R. Diagne, 2001, p.5).

La vérité correspondance se définit à partir d'un rapport de coïncidence entre la pensée et l'objet réel. Celle-ci est redevable au raisonnement syllogistique d'Aristote fondé sur la relation de nécessité logique entre la forme et la matière. Or, chez Frege la forme paraît plus essentielle que la matière. On parle de la cohérence interne dans la mesure où il existe chez Frege, un système symbolique logiquement bien structuré de sorte que l'on puisse démontrer la validité d'une inférence qu'à partir de l'application rigoureuse des lois de la logique pure.

Le mérite de Frege tient du fait qu'il a pu apporter quelque chose d'essentiellement nouveau dans l'histoire de la logique mathématique en ruinant les premières conceptions sur le nombre, conçues dans une perspective logico-psychologique. Il réussit à établir un lien étroit entre la logique et la mathématique (arithmétique) à la faveur du caractère abstrait du nombre qu'il prône. L'étroitesse de ce lien fait utilement signe vers la métaphysique.

Conclusion

Au regard de ce qui précède, cette analyse de la rationalité du nombre chez Frege nous a permis de retenir trois choses essentielles. Premièrement, le nombre n'est pas une réalité empirique saisissable par les sens ou par les représentations psychologiques. Le nombre est une réalité logique qui existe indépendamment du monde extérieur et des représentations psychologiques. C'est une réalité abstraite qui n'est saisissable que par la raison. Eu égard à cette nature abstraite du nombre, l'arithmétique se dissocie radicalement de la psychologie et fait désormais chemin avec la logique et la philosophie.

Deuxièmement, il est question de l'opérationnalité du nombre. Dans ce contexte, il sied de retenir que le nombre s'applique à tous les champs cognitifs. La pensée numérique est transversale et universelle. Cette rationalité tient au fait que Frege a jugé légitime de refonder l'arithmétique à partir des lois logiques qui sont plus abstraites et plus universelles que les lois des sciences de la nature. Désormais, l'arithmétique et la logique forment un seul tout. La théorie frégéenne du nombre apparaît comme le point d'ancrage du processus de logicisation des mathématiques d'une part et celui de la mathématisation de la logique d'autre part.

Troisièmement, nous retenons que la rationalité du nombre constitue un changement paradigmatique. Désormais, la vérité logico-mathématique n'est plus construite à partir de l'exigence de la correspondance nécessaire entre la pensée et la réalité. On passe d'une approche onto-logique de la vérité à une approche exclusivement formelle de la vérité conçue à partir de l'exigence de la cohérence de la pensée avec elle-même. On parlera mieux de la validité à la place de la vérité. C'est à l'issue de ce changement de paradigme que la conception frégéenne du nombre apparaît comme le lieu de solidification des relations de complémentarité entre la mathématique, la logique et la philosophie qui, au-delà de tout, forment un seul tout sublime appelé métaphysique. Pour nos recherches futures, nous envisageons d'éclairer davantage cette complémentarité entre la mathématique, la logique et la philosophie à partir d'une analyse critique de l'attitude antipsychologiste de Frege.

Références bibliographiques

DIAGNE Ramatoulaye (2001), *Introduction à la pensée de Gottlob Frege : Qu'est-ce que penser ?* Dakar, PUD.

DJIBO Mamadou (2012), *Des projets fondationnels de Husserl et de Frege à la perspective de Wittgenstein*, Paris, L'Harmattan.

FREGE Gottlob (1999), *Idéographie, un langage formulaire de la pensée pure construit d'après celui de l'arithmétique*, trad. frçe., préface, notes et index par Corine Besson, postface de Jonathan Barnes, Paris, Vrin.

FREGE Gottlob (1969), *Les fondements de l'arithmétique, recherche logico- mathématique sur le concept de nombre*, trad. frçe. et introductionde Claude Imbert, Paris, Seuil,

FREGE Gottlob (1971), *Ecrits logiques et philosophiques*, trad. française. et introduction de Claude Imbert, Paris, Seuil.

FREGE Gottlob (1987), *Frege-Husserl correspondance*, postface de J. T. Desanti, trad. de l'Allemand par G. Granel, Mauvezin, Editions T. E. R,

FREGE Gottlob (1994), *Ecrits posthumes*, trad. de l'Allemand sous la direction de Philippe de Rouilhan et de Claudine Tiercelin, Editions Jacqueline Chambon.

NSONSISSA Auguste (2014), *Pensée et Composition des pensées chez Frege*, Paris, Editions Dianoïa.

ROY Edward (1960), *La pensée mathématique pure*, Paris, P.U.F.

VERLEY Xavier (2004), *Pensée, symbole et représentation. Logique et psychologie chez Frege et Husserl*, Chennevières-sur-Marne, Editions Dianoïa,
VERLEY Xavier (2014), *Le symbolique et le transcendantal*, Paris, L'Harmattan.